www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE des INGENIEURS de la VILLE de PARIS
Math 1 Math 2
page 249
1990
2-1

CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 6

N.B : Le sujet comprend 3 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est recommandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.

Notations et définitions :

On note N l'ensemble des nombres entiers naturels, et R le corps des reels.

Dans tout le problème, on utilise l'expression "polynôme" à la place de "fonction polynôme". On note d°P le degré du polynôme P.

Etant donné un intervalle I de R, on note :

- C(I) l'ensemble des fonctions définies et continues sur I, à valeurs dans R.
- F(I) la partie de C(I) formée des fonctions polynômes définies sur I, à valeurs dans R.
- $F_n(I)$ la partie de F(I) formée des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, et du polynôme nul (n étant un entier naturel).

Etant donné une fonction f définie sur l'intervalle I, à valeurs dans R, on note f' sa fonction dérivée première, et $f^{(p)}$ sa fonction dérivée d'ordre p (p étant un entier naturel).

Partie I :

1°) Soit I un intervalle de R, n un entier naturel, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$, n+1 réels de I tels que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ (1)

a) Pour tout entier k = 0, 1, ..., n, on définit le polynôme T_k par l'égalité :

$$\forall k = 0, 1, \ldots, n, \forall x \in I, T_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - a_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (a_k - a_j)} \qquad (2)$$

(Pour n=0, pour tout réel x appartenant à I, $T_0(x)=1$)

TSVP

Montrez que $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base du R-espace vectoriel $F_n(I)$.

Etant donné un polynôme P de $F_n(I)$, exprimez P comme combinaison linéaire des polynômes T_k.

b) Montrez que les n+1 formes linéaires $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ définies par :

$$\forall k = 0, 1, \dots, n, \forall P \in F(I), \Phi_k(P) = P(a_k) \qquad (3)$$

sont linéairement indépendantes.

2°) On suppose que I = R. Soit $(P_l)_{l\in N}$ une suite de polynômes de $F_n(I)$.

On suppose que pour tout entier k = 0, 1, ... , n, la suite $(P_l(a_k))_{l\in N}$ est convergente (les a_k sont les réels introduits au I 1°)).

a) Montrez que la suite $(P_l)_{l\in N}$ converge simplement sur I.

b) Peut-on affirmer que la suite $(P_l)_{l\in N}$ converge uniformément sur I ?

3°) On suppose que I = [a,b] (avec a<b), et que $(P_l)_{l\in N}$ est une suite de fonctions polynômes de $F_n(I)$ ($n\in N$).

a) Montrez l'équivalence des deux propositions suivantes :

P1 : La suite $(P_l)_{l\in N}$ converge simplement sur I. (4)

P2 : La suite $(P_l)_{l\in N}$ converge uniformément sur I. (5)

b) Montrez que si l'une ou l'autre des conditions précédentes est satisfaite, la suite dérivée $(P'_l)_{l\in N}$ converge uniformément sur I.

4°) On suppose de nouveau que I = R, et que la suite de polynômes $(P_l)_{l\in N}$ de F(I) converge uniformément sur I.

Montrez que la fonction limite P est un polynôme, et qu'il existe un entier naturel n tel que tous les polynômes P_l ($l\in N$) appartiennent à $F_n(I)$.

Partie II :

1°) Soit I=[-1,1], et soit Φ l'application de C(I)xC(I) dans R définie par:

$$\forall (f,g) \in C(I)xC(I), \Phi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \qquad (6)$$

Montrez que Φ est un produit scalaire sur C(I), et que $(C(I),\Phi)$ est un espace vectoriel préhilbertien réel.

2°) Pour tout entier naturel n, soit S_n le polynôme de $F_{2n}(I)$ défini par l'égalité :

$$\forall x \in [-1,1], S_n(x) = (x^2-1)^n \qquad (7)$$

et T_n le polynôme de $F_n(I)$ défini par l'égalité :

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) = S_n^{(n)}(x) \qquad (8)$$

a) Montrez que pour tout entier naturel n, le système $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $F_n(I)$.

b) Soit n un entier naturel non nul, et p un entier naturel tel que p<n. Soit I_p l'intégrale définie par l'égalité :

$$I_p = \int_{-1}^{1} T_n(x)\, x^p\, dx \qquad (9)$$

Démontrez l'égalité :

$$I_p = -p \int_{-1}^{1} S_n^{(n-1)}(x)\, x^{p-1}\, dx \qquad (10)$$

Déduisez-en que $I_p = 0$.

c) En utilisant ce qui précède, montrez que pour tout entier naturel non nul n, et pour tout entier naturel p<n, et pour tout polynôme P de $F_p(I)$, on a l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, P(x)\, dx = 0 \qquad (11)$$

Déduisez-en que les polynômes $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ forment une base de $F_n(I)$ orthogonale pour le produit scalaire Φ.

TSVP

page 250 ECOLE des INGENIEURS de la VILLE de PARIS
1989 2 Math 2

3°) On suppose que n est un entier naturel non nul.

a) Montrez que le polynôme T_n n'a pas de zéro dans l'ensemble $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Indication : On pourra utiliser l'égalité (11), ou utiliser toute autre méthode.

b) Montrez que le polynôme T_n n'a pas de zéro réel multiple.

c) Montrez enfin que le polynôme T_n a exactement n zéros réels simples, appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

4°) On suppose que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2.

a) Montrez que le polynôme $T_1 T_{n-1}$ est combinaison linéaire des polynômes $T_0, T_1, \dots, T_n$.

b) Plus précisément, montrez que le polynôme $T_1 T_{n-1}$ est combinaison linéaire des polynômes T_{n-2}, T_{n-1} et T_n.

c) Déduisez-en une expression de T_n en fonction de T_{n-1} et T_{n-2}.

5°) Soit $\mathcal{N}$ la norme euclidienne sur C(I) associée au produit scalaire Φ.

a) Etant donné une fonction f de C(I) et un entier naturel n, montrez qu'il existe un et un seul polynôme $P_n(f)$ de $F_n(I)$ tel que :

$$\forall P \in F_n(I),\ \mathcal{N}(f-P_n(f)) \leq \mathcal{N}(f-P) \qquad (12)$$

Application : Pour n=0 et n=1, donnez les expressions de $P_n(f)$ en fonction de f.

b) Soit $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une série à termes réels absolument convergente, et f la fonction définie par :

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l x^l \qquad (13)$$

Justifiez l'existence de la fonction f.

Montrez que pour cette fonction f, la suite $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, définie au a) converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(C(I),\mathcal{N})$.

Partie III :

1°) Soit I = [-1, 1], n un entier naturel, et $a_0, a_1, \dots, a_n$, n+1 réels définis comme en I 1°).

a) Montrez qu'il existe n+1 réels uniques $A_0, A_1, \dots, A_n$ tels que :

$$\forall P \in F_n(I),\ \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} A_k P(a_k) \qquad (14)$$

b) Application : on suppose que :

$$n=2\ ;\ a_0 = -\sqrt{3/5}\ ;\ a_1 = 0\ ;\ a_2 = \sqrt{3/5} \qquad (15)$$

Calculez A_0, A_1, A_2.

c) Montrez que dans les conditions du III 1°) b), l'égalité (14) est également vraie pour tout polynôme P de $F_5(I)$.

d) Montrez que dans les conditions du b), l'égalité (14) n'est vraie pour aucun polynôme P de degré 6.

2°) On suppose que n est un entier naturel, et que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les zéros du polynôme T_{n+1} (défini en II 2°)), et que les A_k sont les réels définis selon III 1°) a).

a) Montrez que l'égalité (14) est vraie également pour tout polynôme P de $F_{2n+1}(I)$.

b) Réciproquement, montrez que si l'égalité (14) est vraie pour tout polynôme de $F_{2n+1}(I)$, les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les zéros du polynôme T_{n+1}.

c) Montrez que l'égalité (14) n'est vraie pour aucun polynôme de degré 2n+2.

d) Soit m un entier naturel. Montrez que l'ensemble $G_m(I)$ des polynômes P de $F_m(I)$ pour lesquels l'égalité (14) est vraie est un sous-espace vectoriel du R-espace vectoriel $F_m(I)$.

Déterminez la dimension du R-espace vectoriel $G_m(I)$ en fonction de l'entier m.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail